第5章　定积分及其应用

5.1　定积分的概念

5.2　定积分的性质

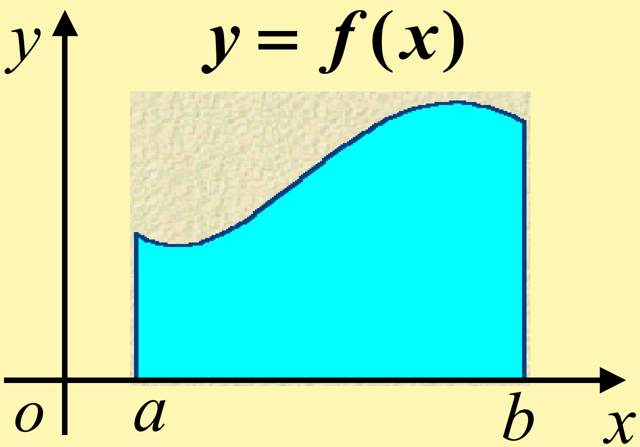
5.1 定积分的概念

一、定积分概念的引入

引例1 求曲边梯形的面积

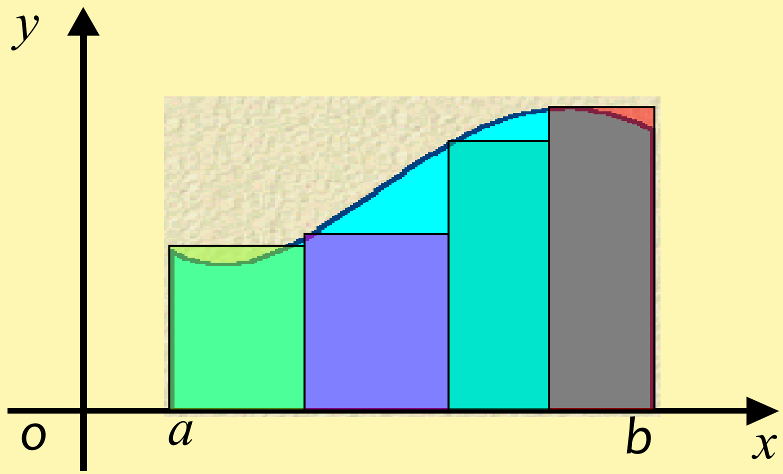
设曲边梯形是由连续曲线 $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$

x轴以及两直线 $x = a, x = b$ 所围成，求其面积 A.

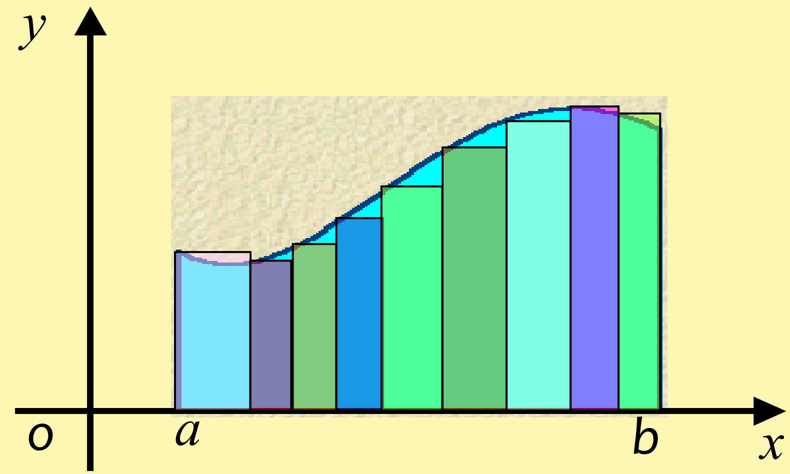


$A = ?$

方法：用矩形面积近似取代曲边梯形面积



（四个小矩形）



（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

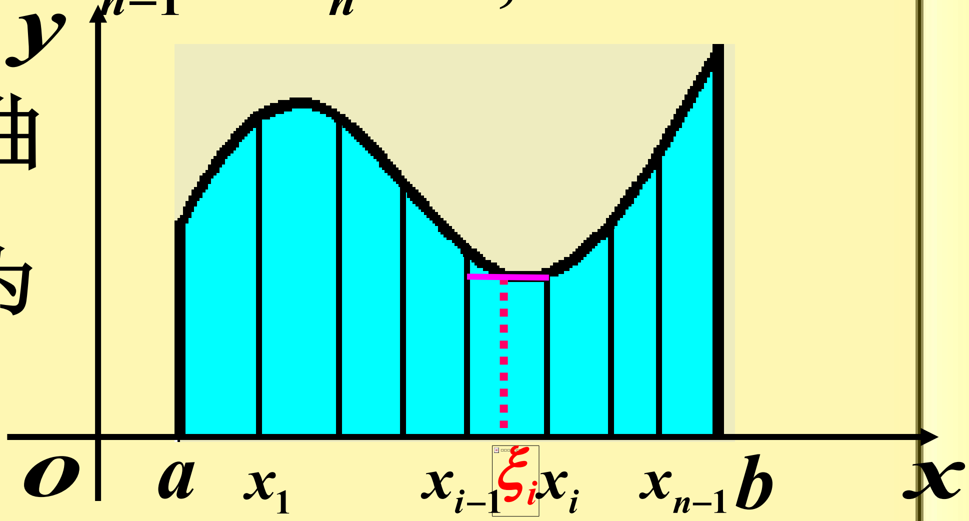
具体作法：

(1) 分割　在区间 $[a,b]$ 内插入 $n-1$ 个分点，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，第 i 个底边长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};$$



(2) 近似　小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积近似小曲边梯形的面积：$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

(3) 求和

曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4) 取极限 当分割无限加细加密，即小区间长度

的最大值 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$趋向于0，

曲边梯形面积为 $$\boxed{A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

5

引例2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\ge 0$，求物体在这段时间内所经过的路程。

（1）“分割”

$$v(\tau_i)$$

$$T_1 = t_0 \quad t_1 \cdots t_{i-1} \quad t_i \cdots t_n = T_2$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

（2）“近似” $\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）“求和” $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（4）“取极限” $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

上述两个问题的共性:

- 解决问题的方法步骤相同：

（1）“分割”　　（2）“近似”

（3）“求和”　　（4）“取极限”

- 所求量极限结构式相同：特殊乘积和式的极限

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

7

二、定积分的概念

1. 定义

设$f(x)$在$[a, b]$上有定义，在$[a, b]$中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots x_{n-1} < x_n = b$$

令$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，任取$\xi_i (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$,

只要$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\} \to 0$时，

和式$A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$总趋于确定的极限$I$ ，

则称极限值I为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，

记作$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

8

由定积分定义，前面讨论两例分别为

$$\text{曲边梯形面积} A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{路程} s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t$$

$[a,b]$ 积分区间

积分上限

积分和

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

说明：(1) 定积分是一数字，仅与被积函数及积分区间有关 ,而与积分变量用什么字母表示无关 ,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2) 如果$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在，

称$f(x)$在区间$[a,b]$上（黎曼）可积

2. 可积的充分条件

（1） 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续 $\Longrightarrow f(x)$在$[a,b]$可积

（2） 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个第一类间断点 $\Longrightarrow$ $f(x)$在$[a,b]$可积

（3）函数$f(x)$在$[a,b]$上单调有界$\Longrightarrow f(x)$在$[a,b]$可积

可积的必要条件

$f(x)$在$[a,b]$可积 $\Longrightarrow$ 有界 反之不真

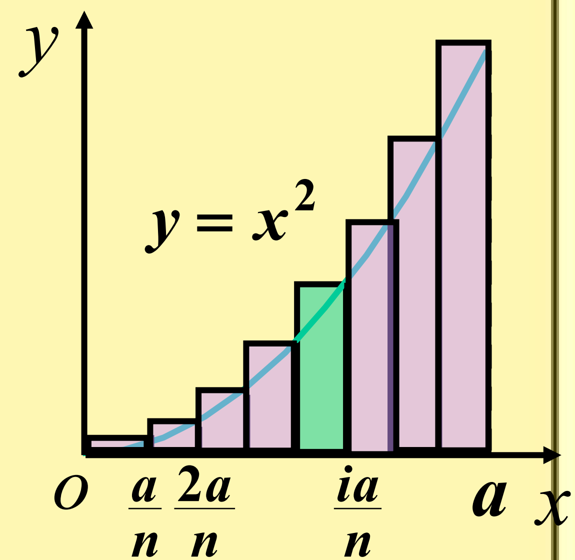
如 $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$ 有界但不可积

例1. 利用定义计算定积分 $\int_0^a x^2 \mathrm{d}x$

解: $f(x)=x^2$在$[0,a]$上连续,可积,

将$[0,a]$ n等分，分点为$x_i=\dfrac{ia}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n-1)$

小区间长度$\Delta x_i=\dfrac{a}{n}$，取$\xi_i=x_i$



$$\text{则}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ia}{n}\right)^2\cdot\frac{a}{n}$$

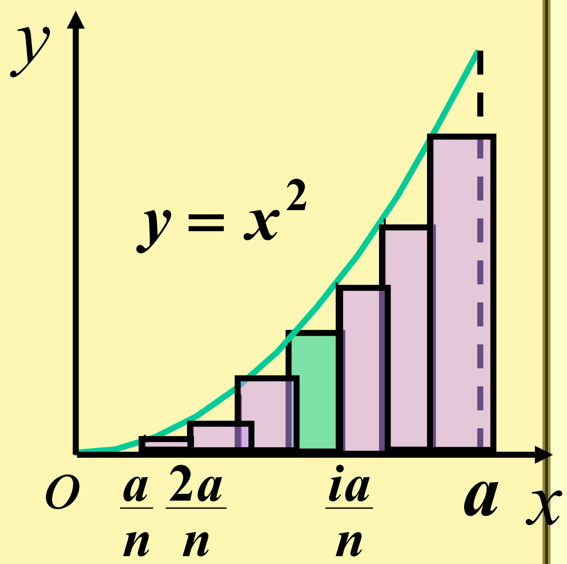
$$=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{所以}\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{a^3}{3}$$

例1. 利用定义计算定积分 $\int_0^a x^2\mathrm{d}x$

解法二：将$[0,a]$ n等分，分点为 $x_i=\dfrac{ia}{n}$，$(i=1,2,\cdots,n-1)$

小区间长度 $\Delta x_i=\dfrac{a}{n}$，取 $\xi_i=x_{i\text{-}1}$



则 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{(i-1)a}{n}\Big]^2\cdot\frac{a}{n}$

$$=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

所以 $\displaystyle\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{a^3}{6}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(2-\frac{1}{n}\Big)\Big]=\frac{a^3}{3}$

$\dfrac{a^3}{n^3}\cdot\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}\le$ 曲边梯形的面积 $\le\dfrac{a^3}{n^3}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

13

例2. 将下列极限表示成定积分形式。

$$(1)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

14

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1^2}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\right)^2}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

上式看成函数$\dfrac{1}{1+x^2}$在区间[0, 1]上的积分和式

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

15

第二节 定积分的性质

对定积分的补充规定:

当$a=b$时, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

显然 $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$, $\int_a^b 0\,\mathrm{d}x=0$

$$\int 0dx=C$$

说明:

在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小，特殊情况会注明。

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

证: 左端 $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$ = 右端

性质2 $\int_a^b k f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （k 为常数)

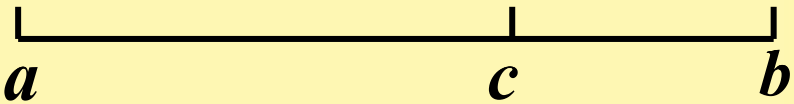
$$\int_a^b [k\, f(x) \pm l\, g(x)]\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm l\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

17

性质3 不论 a, b, c 的相对位置如何，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证: 当 $a < c < b$ 时，



因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，

所以在分割区间时，可以选取 c 为分点，于是

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\Big\downarrow \text{令 } \lambda \to 0$$

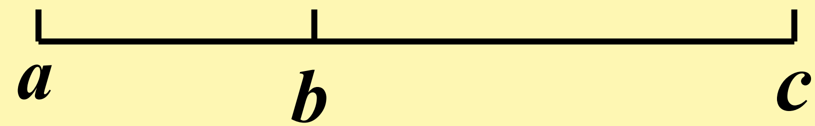
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质3 不论 a, b, c 的相对位置如何，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

当 a, b, c 的相对位置任意时，例如 $a < b < c$，

则有



$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

（定积分对于积分区间具有可加性）

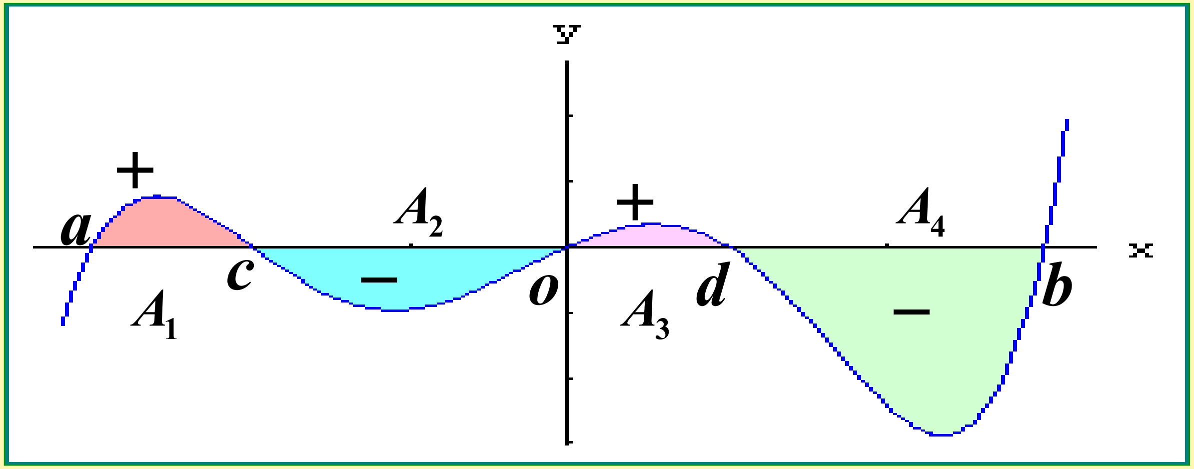
定积分的几何意义

$f(x)>0,\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形的面积

介于x轴、函数$y=f(x)$的图形及两条直线$x=a$, $x=b$之间的面积

$f(x)<0,\quad \int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x = A \Rightarrow -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形的面积的负值



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

20

性质4 如果在区间$[a,b]$上，$f(x)\geq 0$,

则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0 \quad (a<b)$

证：$\because \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 及$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$

推论. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b)$$

保序性

证： 构造 $F(x)=g(x)-f(x)$

性质5 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b)$ 绝对值性质

证： $-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)| \Rightarrow$

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

性质6 若m, M是$f(x)$在$[a, b]$上的最小值，最大值，

则$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

证: $$\because \quad m \le f(x) \le M$$

$$\therefore \int_a^b m\ \mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \le \int_a^b M\ \mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M$$

22

性质7（积分中值定理）

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

积分中值公式

证: 设 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值分别为 m, M,

则由性质6 可得

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

根据闭区间上连续函数介值定理, 在$[a,b]$上至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

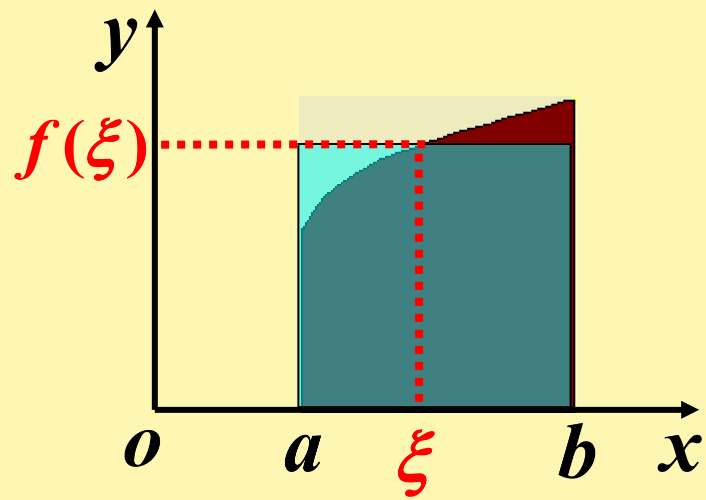
因此定理成立.

积分中值公式的几何解释：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

曲边梯形面积

矩形面积



$$\xi \in [a,b]$$

事实上可以取$\xi \in (a,b)$!

（由下一节的微积分基本定理可知！）

推广的积分中值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续, $g(x)$在$[a,b]$上连续且不变号,

则存在$\xi\in[a,b]$使 $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

证: 设 $g(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$

再设 $m\le f(x)\le M \Rightarrow mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$

$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(i) $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$

(ii) $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M$

保序性：$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

例1. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)\ge 0$，但$f(x)$不恒为0，

则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证明：因为 $f(x)$不恒等于0， 由 $f(x)\ge 0$ 知，

至少存在一点$\xi\in[a,b]$使$f(\xi)>0$。

由 $f(x)$在$[a, b]$上连续知，$\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi) > 0$

存在$a\le\alpha<\beta\le b$， 当 $x\in[\alpha,\beta]$时，$f(x) > \frac{1}{2}f(\xi)$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\xi)dx = \frac{\beta-\alpha}{2}f(\xi) > 0$$

26

例1. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续, $f(x)\geq 0$, 但$f(x)$不恒为0,

则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 存在$\alpha$, β, 使$\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x$

$\geq\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

结论:

(1) $f(x)\leq g(x)\Rightarrow \int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

(2) $f(x)\leq g(x)$ 且 $f(x)\neq g(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$$

(3) $f(x)<g(x)\Rightarrow \int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$

例2. 比较$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$与$\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x$之大小。

解法一: 令$f(x)=e^x-1-x,\ \ 0\le x\le 1,$

则有 $x\in(0,1)$时，$f'(x)=e^x-1>0,$ 所以$f(x)>f(0)=0$

当 $0\le x\le 1$ 时，$e^x\ge 1+x$　又$e^x\not\equiv 1+x$

于是$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x>\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x$

解法二: 当$x>0$时，$e^x-e^0=e^{\xi}(x-0)\ \xi\in(0,x)$

$e^x>e^0+x=1+x$　$\therefore$ 当 $0\le x\le 1$ 时，$e^x\ge 1+x$

解法三:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\ \ge 1+x$$

例3. 对$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$估值。

解: $f(x)=1+\sin^2 x$, $\quad f'(x)=2\sin x\cos x$,

$$f(x)\text{在}\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\text{内的驻点为 } x=0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{4},\ f(0)=1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2 \qquad m=1, M=2,$$

$$\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\le\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\le\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\times 2$$

$$\text{于是有}\frac{5\pi}{6}\le\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\le\frac{5}{3}\pi$$

内容小结

1. 理解定积分的概念与几何意义

2. 掌握定积分的性质

作业：习题5-1，5-2

预习5-3　微积分基本定理

思考题：设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，且有

$$f(1)=2\int_0^{1/2} x f(x)dx$$

证明：存在$\eta\in(0,1)$，使 $f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$

31

例4. 设$f(x)$在$[0,1]$上可微,且满足 $f(1)=2\int_0^{1/2} xf(x)\mathrm{d}x$,

试证存在$\eta\in(0,1)$,使$f'(\eta)=-\dfrac{f(\eta)}{\eta}$

证明:由积分中值定理

$$f(1)=2\int_0^{1/2} xf(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)\quad \xi\in[0,\frac{1}{2}]$$

令$F(x)=xf(x)$ $F(1)=f(1)=F(\xi)$

由题设知$F(x)$在$[\xi,1]$满足罗尔定理的条件,

故存在一点$\eta\in(\xi,1)\subset(0,1)$,使$F'(\eta)=0$

即$F'(\eta)=f(\eta)+\eta f'(\eta)=0\Rightarrow f'(\eta)=-\dfrac{f(\eta)}{\eta}$

32